CVIČENIA Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I

Zbyňek Kubáček, Ján Valášek

16. decembra 2002

Obsah

0.1 Taylorov polynóm

Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$. Potom *Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f v bode a* sa nazýva polynóm (v premennej x)

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ak špeciálne $a = 0$, používa sa namiesto názvu Taylorov polynóm označenie *Maclaurinov polynóm* .

Veta 19. Ak funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$ a T_n je jej Taylorov polynóm stupňa n v bode a, tak

$$\lim_{n \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

(Rozdiel $f - T_n$ sa nazýva *zvyšok Taylorovho polynómu* stupňa n funkcie f v bode a.)
Nech funkcia g je definovaná v niektorom rýdzom okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ a nenadobúda tam nulové hodnoty. Znakom $o(g)$ budeme označovať triedu všetkých funkcií f takých, že

1. ich definičný obor obsahuje niektoré rýdze okolie bodu a,
2. platí $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Namiesto zápisu $f \in o(g)$ sa používa zápis $f = o(g)$. (Pokiaľ by s kontextu nebolo jasné, ktorého $a \in \mathbb{R}$ sa vzťah $f = o(g)$ týka, používa sa zápis $f = o(g)(x \to a)$.) Zápis $f = h + o(g)$ treba chápať nasledovne: funkcia f je súčtom funkcie h a niektorej funkcie z triedy $o(g)$.

Ak funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$, patrí podľa vety 19 zvyšok jej Taylorovho polynómu stupňa n v bode a do triedy $o((x-a)^n)$, možno teda napísať

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

tento zápis sa nazýva Taylorovým vzorcom so zvyškom v Peanovom tvare.

V nasledujúcich príkladoch budeme používať tieto tvrdenia (v zápisoch všade vynechávame $x \to 0$; m, n sú prirodzené čísla):

1. ak $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^n)$, tak $f(x) + g(x) = o(x^n)$;

2. ak $m > n$ a $f(x) = o(x^m)$, tak $f(x) = o(x^n)$;
3. ak $f(x) = o(x^n)$, tak $f^m(x) = o(x^{m.n})$;
4. ak $f(x) = o(x^n)$, tak $x^m.f(x) = o(x^{m+n})$;
5. ak $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^m)$, tak $f(x).g(x) = o(x^{m+n})$.

Uvedené aplikácie budeme zapisovať nasledovne:

1. $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$;
2. $o(x^m) = o(x^n)$ pre $m > n$;
3. $o^m(x^n) = o(x^{m.n})$;
4. $x^m.o(x^n) = o(x^{m+n})$;
5. $o(x^n).o(x^m) = o(x^{m+n})$.

Používanie týchto zápisov vyžaduje istú opatrnosť, pretože ide o symbolické vyjadrenie implikácií, nemožno (na rozdiel od skutočných rovníc) tieto rovnosti čítať sprava doľava.

1. Na základe výpočtu príslušných derivácií zostrojte Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a, ak:

1. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $a = -\frac{1}{2}$, $n = 4$;
2. $f(x) = \tan x$, $a = 0$, $n = 3$;
3. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $a = 0$, $n = 5$;
4. $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, $a = -1$, n ľubovoľné ;
5. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $a = \frac{\pi}{4}$, n ľubovoľné ;

2. Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$, nech existujú čísla $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tak platí

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Potom $A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_n(x-a)^n$ je Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a. Dokážte!

V nasledujúcich príkladoch využijeme tvrdenie z pr. 386 a znalosť Maclaurinových polynómov týchto funkcií (možno zostrojiť výpočtom príslušných derivácií):

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right)$; [1]
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$;
4. $\ln 1 + x = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
5. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$;
6. $(1+x)^\alpha = 1 + x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$; $(\alpha \in \mathbb{R})$

3. Nájdite Maclaurinove polynómy stupňa n funkcií:

1. $f(x) = e^{\frac{x}{7}}$;
2. $f(x) = e^{x^2}$;
3. $f(x) = \cos x^3$;
4. $f(x) = x^2 \ln(1+x)$;
5. $f(x) = \frac{1}{2+3x^2}$;
6. $f(x) = x^3 \sin 3x$.

[1] pretože $\sin^{2n}(0) = 0$, majú Maclaurinov polynóm stupňa $2n-1$ a Maclaurinov polynóm stupňa $2n$ rovnaký tvar, preto aj zvyšok Maclaurinovho polynómu stupňa $2n-1$ funkcie sin patrí do triedy $o(x^{2n})$; podobná poznámka platí o funkcii cos

Riešenie: 2. Pretože funkcia e^{x^2} má derivácie všetkých rádov v bode 0 (vyplýva to matematickou indukciou z viet o derivácii súčtu, súčinu a zloženej funkcie), existuje jej Maclaurinov polynóm ľubovoľného stupňa. Jeho koeficienty nebudeme hľadať derivovaním funkcie e^{x^2} namiesto toho použijeme tento postup:
Ak označíme $R_n(z)$ zvyšok Maclaurinovho polynómu stupňa n funkcie e^z, tak pre každé $z \in \mathbb{R}$ platí

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + R_n(z) \tag{1}$$

pritom podľa vety 19 je $\lim_{z\to 0} \frac{R_n(z)}{z^n} = 0$ t.j. $R_n(z) = o(z^n)$.
Ak položíme $z = x^2$, z (1) vyplýva: pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + R_n\left(x^2\right)$$

pritom $\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x^2)}{x^{2n}} = 0$ (vyplýva to z vety o limite zloženej funkcie a z toho, že $\lim_{z\to 0} \frac{R_n(z)}{z^n} = 0$), teda $R_n\left(x^2\right) = o\left(x^{2n}\right)$. Podľa tvrdenia z pr. 386 je preto $1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$ Maclaurinov polynóm stupňa $2n$ funkcie e^{x^2}.

(Priamo z definície Maclaurinovho polynómu vyplýva: ak z Maclaurinovho polynómu stupňa k; $k \geq 2$ funkcie f vynecháme člen obsahujúci x^k, dostaneme Maclaurinov polynóm stupňa $k-1$ funkcie f. Teda Maclaurinov polynóm stupňa $2n-1$ funkcie e^{x^2} je $1 + x^2 + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(n-1)!}$)

Riešenie: 4. Ak rovnosť

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-3}\frac{x^{n-2}}{n-2} + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

vynásobíme x^2, dostaneme

$$x^2\ln(1+x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^{n-3}\frac{x^n}{n-2} + (-1)^{n-2}\frac{x^{n+1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n} + x^2 o(x^n)$$

Funkcia $(-1)^{n-2}\frac{x^{n+1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n} + x^2 o(x^n)$ patrí do triedy $o(x^n)$, preto môžeme písať:

$$x^2\ln(1+x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^{n-3}\frac{x^n}{n-2} + o(x^n)$$

čo podľa tvrdenia z pr. 386 znamená, že $x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^{n-3}\frac{x^n}{n-2}$ je Maclaurinov polynóm stupňa n; $n \geq 3$ funkcie $x^2\ln(1+x)$. Zrejme Maclaurinovými polynómami stupňa 1 a 2 sú funkcie identicky rovné nule.

4. Najdite Maclaurinove polynómy stupňa n funkcií:

1. $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $n = 4$;
2. $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3\sin x}$, $n = 3$;
3. $f(x) = \ln^3\left(1 - \frac{x}{2}\right)$, $n = 3$;
4. $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$, $n = 4$;
5. $f(x) = \cos x . \ln(1+x)$, $n = 5$.

Riešenie: 1. Ak do rovnosti

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + R(z)$$

(R označuje zvyšok Maclaurinovho polynómu) dosadíme $z = \sin^2 x$, dostaneme

$$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + R\left(\sin^2 x\right) \tag{2}$$

pritom $R\left(\sin^2 x\right) = o\left(x^4\right)$. Pretože $R(z) = o\left(x^2\right)$, je

$$\lim_{x\to 0}\frac{R\left(\sin^2 x\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^4} . \lim_{x\to 0}\frac{R\left(\sin^2 x\right)}{\sin^4 x} = 1 . \lim_{z\to 0}\frac{R(z)}{z^2} = 0$$

Pomocou rovností $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$, $\sin x = x + o(x)$ môžeme (2) prepísať a upraviť nasledovne:

$$
\begin{aligned}
e \sin x &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)^2 + o\left(x^4\right) = \qquad (3) \\
&= \boxed{1} + \left(x^2\right) + \left(\boxed{x^2} + \frac{x^6}{3!3!} + o^2\left(x^3\right) + \boxed{-\tfrac{2x^4}{3!}} + 2x.o\left(x^3\right) - \frac{2x^3.o\left(x^3\right)}{3!}\right) + \\
&\quad + \left(\boxed{x^4} + 4x^3.o(x) + 6x^2.o^2(x) + 4x.o^3(x) + o^4(x)\right) + o\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

Všetky ščítance okrem vyznačených patria do $o\left(4^x\right)$, patrí tam teda aj ich súčet. Rovnosť (3) preto môžeme písať

$$e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 + \left(1 - \frac{2}{3!}\right) x^4 + o\left(x^4\right)$$

čo podľa tvrdenia z pr. 386 znamená, že $1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4$ je Maclaurinov polynóm stupňa 4 funkcie $e^{\sin^2 x}$.

Poznámka: Zo záveru uvedeného postupu vyplýva, že stupne Maclaurinových polynómov funkcií e^z a $sin^2 x$ sme zvolili tak, aby v (3) všetky ščítance, ktoré nemajú tvar αx^m, $m = 0, 1, \dots$ (medzi ne patrí aj funkcia $R\left(\sin^2 x\right)$) boli z triedy $o\left(x^4\right)$.

Všimnite si tiež, že hoci pravá strana rovnosti (3) obsahuje dokonca polynóm 6. stupňa, nemôžeme tvrdiť, že tento polynóm je Maclaurinovým polynómom 6. stupňa funkcie $e^{\sin^2 x}$; z nášho postupu totiž nevyplýva, že by súčet zvyšných členov na pravej strane rovnosti (3) patril do $o\left(x^6\right)$.

5. Nájdi Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a, ak:

1. $f(x) = e^{x^2+2x-1}$, $a = -1$;
2. $f(x) = x^2 e^{-2x}$, $a = -1$;
3. $f(x) = (1 + x^2)\ln\sqrt{1+x}$, $a = 0$;
4. $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}$, $a = 0$;
5. $f(x) = \frac{x+5}{2x-4}$, $a = -\frac{1}{10}$;
6. $f(x) = \ln\left(x^2 - 7x + 12\right)$, $a = 1$.

Návod: Substitúciou $x - a = t$ možno hľadanie Taylorovho polynómu funkcie f v bode a previesť na hľadanie Maclaurinovho polynómu funkcie $g(t) := f(t + a)$.

6. Pomocou Taylorových polynómov nájdite nasledujúce limity:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$;
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^4}$;
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;
4. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$;
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^3\right) - 2\sin x + 2x\cos x^2}{\tan x^3}$;
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}$.

Riešenie: 2. Funkciu v čitateli napíšeme v tvare $\alpha x^m + o\left(x^m\right)$, kde $\alpha \neq 0$ (t.j. z tých jej Maclaurinových polynómov, ktoré nie sú identicky rovné 0, vyberieme polynóm najnižšieho stupňa); To isté urobíme v menovateli.

V našom prípade:

$$
\begin{aligned}
\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)\right) = -\frac{1}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \\
\sin x^4 &= x^4 + o\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

Potom:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^4\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12} + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}}{1 + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}} = \frac{1}{12}$$

(rovnosť $\lim_{x\to 0} \frac{o\left(x^4\right)}{x^4} = 0$ vyplýva z definície symbolu $o\left(x^4\right)$).

7. Nájdite $f^{(k)}(0)$, ak:

1. $f(x) = e^{-x^2}$, $k = 60$;
2. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, $k = 32$.

Veta 20. Nech je daná funkcia f, nech funkcia $f^{(n)}$ je definovaná a spojitá v niektorom okolí $O(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$, nech pre každé $x \in O(a) \setminus \{a\}$ existuje vlastná $f^{(n+1)}(x)$. Nech T_n je Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a. Potom

1. pre každé $x \in O(a)$, $x > a$ ($x \in O(a)$, $x < a$) existuje číslo $\vartheta(x) \in (a, x)$ ($\vartheta(x) \in (x, a)$) také, že
$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
(tzv. Lagrangeho tvar zvyšku);
2. pre každé $x \in a$, $x > a$ ($x \in a$, $x < a$) existuje číslo $\vartheta(x) \in (a, x)$ ($\vartheta(x) \in (x, a)$) také, že
$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{n!}(x-a)(x-\vartheta(x))^n$$
(tzv. Cauchyho tvar zvyšku)

8. Odhadnite absolútnu chybu Δ nasledujúcich približných vzorcov:

1. $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$;
2. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $|x| \leq 0,5$;
3. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$, $0 \leq x \leq 0,2$.

9. Pre $x \geq 0$ dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$;
2. $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2}$;
3. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.